9. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $F : V \to V$ linear. Betrachte V als $K[X]$-Modul mit
$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right) v = \sum_{j=0}^{n} a_j F^j(v), \qquad v \in V.$$
   (a) Zeigen Sie, dass V ein endlich erzeugter $K[X]$-Modul ist.
   (b) Benutzen Sie den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereichen, um zu zeigen, dass
   $$V \simeq K/(f_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus K/(f_r^{e_r})$$
   für (nicht notwendig verschiedene) irreduzible Polynome f_j, $j \in \{1, \ldots, r\}$ und natürliche Zahlen e_j gilt.
   (c) Geben Sie eine Matrixdarstellung von F bezüglich einer mit der Zerlegung in 9b verträglichen Basis von V an.
   (d) Wie vereinfacht sich die Zerlegung in 9b, wenn K algebraisch abgeschlossen ist?
   (e) Wie sieht die Matrixdarstellung von F in diesem Fall aus?
   (f) Zeigen Sie: es gibt genau dann ein $v \in V$, sodass v, $F(v)$, …, $F^{n-1}(v)$ linear unabhängig sind, wenn die irreduziblen Polynome in der Darstellung von 9b paarweise verschieden sind.

10. Besorgen Sie das Programmpaket KANT/KASH. Lösen Sie damit Beispiel 4

11. Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$.
   (a) Sei f normiert. Geben Sie ein (ineffizientes) Verfahren an, f in $\mathbb{Z}[X]$ zu faktorisieren, indem Sie alle komplexen Nullstellen näherungsweise bestimmen und damit auf Faktorensuche gehen, wobei Sie Eigenschaften ganzalgebraischer Zahlen ausnutzen. Faktorisieren Sie damit $f = (X^2 - 256)(X^2 - 1)X - 1$.
   (b) Wie kann man obiges Verfahren auch verwenden, wenn der Leitkoeffizient nicht 1 ist. Erproben Sie das an $17X^5 + 25X^2 + 3$.

12. Verallgemeinern Sie die Idee aus Beispiel 11 zu einer weiteren Lösung von Beispiel 3.

13. Bestimmen Sie eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von
   (a) $f = (X^2 - 25)X(X^2 - 1) - 1$
   (b) $f = X^4 - 80X^3 - X^2 + 80X - 1$

   ist. Verwenden Sie zunächst keine spezialisierte Software (also ein „gewöhnliches“ Computeralgebrasystem). Bestimmen Sie jeweils auch die Diskriminante des Körpers sowie die Diskriminante der mit dem jeweils angegebenen Gleichungsordnung.

14. Beispiel 13 mit Pari.

15. Beispiel 13 mit Kant.

16. Geben Sie ein (oder mehrere) Beispiel eines Ringes R, einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge D von R sowie zwei Idealen I und J an, sodass $D^{-1}I = D^{-1}J$.

17. Seien ω_1, ω_2, ω_3 linear unabhängige Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K. Man zeige, dass
$$\{a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 : a, b, c \in \mathbb{Z}, 2a + 3b + 5c = 0\}$$
   ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist, und gebe eine Basis an.

18. Man bestimme die Dedekindsche Ordnung von $\langle 2, \sqrt{2}/2\rangle$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.