1. Seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $X_1, \ldots, X_n$ Unbestimmte über R. Für $0 \le k \le n$ definiere das k-te elementarsymmetrische Polynom als
$$s_k = \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \prod_{j \in J} X_j.$$
Beispielsweise gilt also für $n = 3$
$$s_0 = 1, \qquad s_1 = X_1 + X_2 + X_3, \qquad s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3, \qquad s_3 = X_1X_2X_3.$$
Ein Polynom $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ heißt *symmetrisch*, wenn
$$F(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)} \ldots, X_{\sigma(n)}) = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
für alle Permutationen $\sigma \in S_n$ gilt.
Weiters setze $P_k = \sum_{j=1}^n X_j^k$.
   (a) Zerlegen Sie $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} s_{n-j} Z^j$ in Linearfaktoren.
   (b) Es gilt $P_2 = s_1^2 - 2s_2$ (Check!). Stellen Sie P_3 durch s_1, s_2 und s_3 dar.
   (c) Die Folge P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, erfüllt eine Rekursionsgleichung n-ter Ordnung. Welche?
   (d) Zeigen Sie: $\{f \in R[X_1, \ldots, X_n] : f \text{ ist symmetrisch}\} = R[s_1, s_2, \ldots, s_n]$, d.h., jedes symmetrische Polynom ist als Polynom allein in den elementarsymmetrischen Polynomen darstellbar (so wie die Beispiele in Teil 2).
   Hinweis. Sortieren Sie die Summanden von $f = \sum c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ lexikographisch absteigend nach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

2. Seien M/L und L/K endliche Körpererweiterungen und $\beta \in M$. Zeigen Sie
$$N_{L/K}(N_{M/L}(\beta)) = N_{M/K}(\beta).$$
Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall $M = L(\beta)$. Hier ist es günstig, $\{1, \beta, \ldots, \beta^{m-1}\}$ als Basis von M/L zu wählen, wobei $m = [L(\beta) : L]$.

3. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2007}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. Bestimmen Sie den Grad von L über $\mathbb{Q}$, alle $\mathbb{Q}$-Homomorphismen von L nach $\mathbb{C}$, ein primitives Element der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$. Drücken Sie die angegebenen Erzeuger durch das primitive Element aus.

4. Berechnen Sie $\beta = 1/(\alpha^2 + 7)$ (als Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2$), wobei $\alpha^3 + 2007\alpha^2 + 3\alpha + 6 = 0$. Berechnen Sie auch das Minimalpolynom von β sowie numerische Näherungen seiner absoluten und relativen Konjugierten.

5. Besorgen Sie das Programmpaket PARI/GP. Lösen Sie damit Beispiel 4.

6. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, X eine Unbestimmte über K und $L = K(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in X mit Koeffizienten aus K. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(Z) = Z^p - X$ aus $L[Z]$ irreduzibel, aber nicht separabel ist.

7. Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und φ eine lineare Funktion auf dem Vektorraum L über K mit Werten aus K. Zeigen Sie, dass es dann genau ein $\beta \in L$ gibt, sodass für alle $x \in K$ die Beziehung $\varphi(x) = \mathrm{Tr}_{L/K}(\beta x)$ gilt.

8. Sei D eine quadratfreie ganze Zahl (d.h., es gebe kein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 \mid D$). Bestimmen Sie alle Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, die ganz über $\mathbb{Z}$ sind.